

VIZUALIZÁCIA MNOHOLISTÝCH FUNKCIÍ KOMPLEXNEJ PREMENNEJ POMOCOU RIEMANNOVEJ PLOCHY

Miroslava Valíková¹, Pavel Chalmovianský²

KAGDM, FMFI UK, Mlynská dolina, 842 48 Bratislava, SR

¹ e-mail: miroslava.valikova@fmph.uniba.sk

² e-mail: pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk

Abstrakt. Na vizualizáciu niektorých komplexných funkcií sa často používa ofarbovanie definičného oboru. Táto metóda zlyhá pri kreslení grafu mnoholistej funkcie. Preto sa pri niektorých takýchto funkciách používajú Riemannove plochy. Na takejto ploche sa mnoholistá funkcia správa ako jednolistá. V našej publikácii ukážeme, ako sa dá vytvoriť Riemannova plocha pre racionálne komplexné odmocniny polynomickej funkcie a ich súčin. Riemannovu plochu vytvárame nad Riemannovou sférou, čo nám zabezpečuje vizualizáciu celého definičného oboru danej funkcie vrátane nekonečna. Keď účové body zobrazenia – vetviace singulárne body lokálne zvyrazňujeme špirálovým obrazom malej kružnice so stredom v singulárnom bode.

Keľúčové slová: mnoholisté komplexné funkcie, Riemannova plocha, komplexné odmocniny

1. Úvod do problematiky

Pri skúmaní reálnej funkcie reálnej premennej si často ako pomôcku nakreslíme graf funkcie. Z neho vieme získať predstavu o priebehu funkcie na danom intervale. Vizualizácia komplexných funkcií komplexnej premennej patrí medzi náročné úlohy hlavne kvôli dimenzii ambientného priestoru, v ktorom sa grafy funkcií prirodzene nachádzajú. Množinu komplexných čísel \mathbb{C} vieme stotožniť s rovinou \mathbb{R}^2 , a teda $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ môžeme zobrazovať ako $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Graf takejto funkcie sa nachádza v štvorrozmernom priestore.

Jednou z možností, ako získať predstavu o priebehu funkcie, je zobrazit' zvlášť definičný obor a obor hodnôt funkcie pomocou transformácie mriežky. Ďalšou z možností je skúmať samostatne modul a argument funkcie. Tieto postupy popisujú iba časť vlastností funkcie a nie funkciu ako celok. Preto vznikla technika ofarbovania definičného oboru funkcie [5].

V komplexnej analýze sa často vyskytujú viaclisté funkcie. Sú to funkcie, ktoré jednému vzoru priradia viac obrazov (napríklad logaritmus, odmocnina). Technika ofarbovania definičného oboru pri takýchto funkciách nefunguje, pretože nám zobrazí iba časť hodnôt. Na prácu s mnoholistými funkciami sa používa technika Riemannových plôch. Základné pojmy, ktoré nie sú v ďalšom texte definované, sa dajú nájsť v [4, 6].

2. Riemannova plocha

Nech X je reálna 2-rozmerná varieta. Komplexná súradnicová mapa na X je dvojica (U, ϕ) , kde $\phi: U \rightarrow V$ je homeomorfizmus, $U \subset X$ je otvorená množina a $V \subset \mathbb{C}$ je otvorená podmnožina. Dve komplexné súradnicové mapy $\phi_i: U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2$ sú holomorfne kompatibilné, ak zobrazenie $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}: \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ je biholomorfné.

Komplexný atlas na X je systém komplexných súradnicových máp $\mathcal{U} = \{(U_i, \phi_i): U_i \subset X, \phi_i: U_i \rightarrow V_i, i \in I\}$, ktoré sú holomorfne kompatibilné a zároveň systém množín $\{U_i\}_{i \in I}$ je

pokrytím priestoru X . Dva atlasy \mathcal{U} a \mathcal{U}' na priestore X sú analyticky ekvivalentné, ak každá mapa z \mathcal{U} je holomorfne kompatibilná s každou mapou z \mathcal{U}' . Pod komplexnou štruktúrou na 2-rozmernej variete X rozumieme triedu ekvivalencie analyticky ekvivalentných atlasov na X .

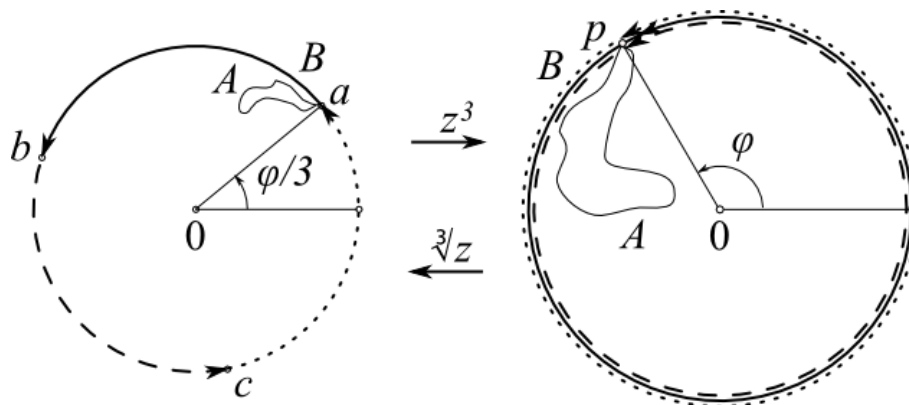
Riemannova plocha je pár (X, \mathcal{S}) , kde X je jednoducho súvislá 2-rozmerná varieta a \mathcal{S} je komplexná štruktúra na X , ktorú potrebujeme na jednoznačné definovanie holomorfnej komplexnej funkcie $f(z)$. To znamená, že viaclistá komplexná funkcia komplexnej premennej $f(z)$ je na tejto 2-rozmernej variete jednolistá. Ak vezmeme jeden list Riemannovej plochy, získame jednu vetvu funkcie $f(z)$. Výsledná plocha závisí od počtu vetviacich bodov a vetiev funkcie $f(z)$. Podrobnosti o existencii Riemannovej plochy a jej ďalších vlastnostiach možno nájsť v [3].

3. Komplexná odmocnina

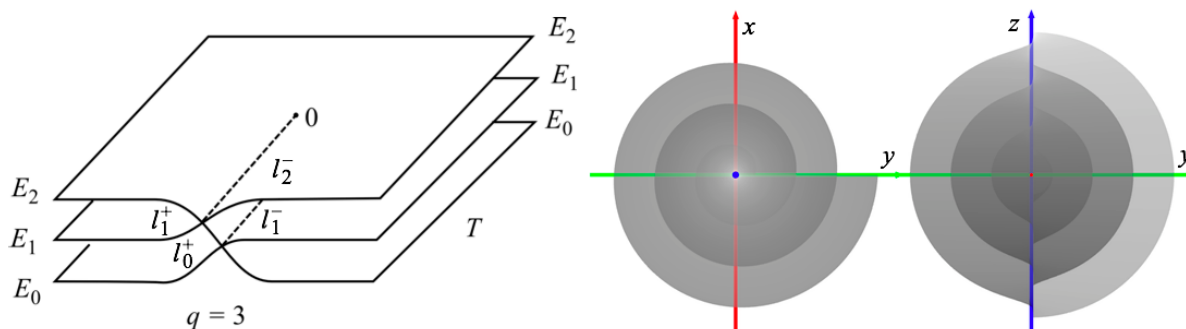
Jednoduchým príkladom mnoholistého zobrazenia je n -tá odmocnina, kde $n \in \{2, 3, \dots\}$. Ukážeme si ako príklad 3. odmocninu. Táto funkcia zobrazí jeden bod rôzny od nuly na tri rôzne hodnoty, poz. obr. 1 Tieto tri hodnoty vieme jednoducho nájsť, ak použijeme goniometrický zápis komplexného čísla. Teda ak použijeme zápis $z = re^{i\phi}$, tak po odmocnení získame tvar $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}e^{i(\phi/3)}$, kde $\sqrt[3]{r}$ je reálna kubická odmocnina vzdialenosti bodu z od bodu 0.

Na začiatok si zvolíme $\sqrt[3]{p} = a$. Ak prechádzame po uzavretej, po častiach hladkej krivke A , ktorá začína a končí v bode p a neobsahuje bod 0 vo svojom vnútri, tak obraz tejto krivky začínajúci v bode a sa vráti do bodu a . Ak sa však presúvame po uzavretej kružnici B z bodu p okolo bodu 0 do bodu p , tak sa $\sqrt[3]{z}$ nevráti do bodu a , ale prejdeme do bodu b . Pri ďalšom prechode po krivke B sa dostaneme do bodu c a až po treťom obehnutí okolo bodu 0 po tejto krivke sa vrátíme do bodu a . Bod $z = 0$ nazývame vetviaci bod funkcie $\sqrt[3]{p}$, poz. aj [6].

Prejdime teraz ku konštrukcii Riemannovej plochy funkcie $\sqrt[3]{z}$. V prvom kroku si nakreslíme ľubovoľnú krivku C bez samopriesekov z vetviaceho bodu 0 do bodu ∞ . Túto krivku nazývame rez vetiev. V našom prípade zvolíme za krivku C polpriamku $l = \{z \in \mathbb{R}; z \geq 0\}$. Doplnkom je množina $E = \mathbb{C} \setminus l$. Označme hranice rezov nasledovne: $l^+ = \{z \in l: z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^+; z_n^+ \in O_z^+\}$, kde O_z^+ je polokolie bodu $z \in l \setminus 0$ také, že $\Im(z) > 0$. Analogicky potom $l^- = \{z \in l: z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n^-; z_n^- \in O_z^-\}$, kde O_a^- je polokolie bodu $z \in l \setminus 0$ také, že $\Im(z) < 0$.



Obr. 1. Tretia odmocnina komplexného čísla daného bodom $p \neq 0$ zobrazí tento bod na tri rôzne hodnoty a, b, c .



Obr. 2. Na obrázku vľavo vidíme načrtnutú Riemannovu plochu funkcie $f(z) = \sqrt[3]{z}$, vpravo vidíme plochu tejto funkcie vytvorenú naším algoritmom (poz. 4.2).

Keďže $\sqrt[3]{z}$ priradí jednému vzoru 3 obrazy, tak potrebujeme 3 kópie množiny E . Označme ich E_0, E_1, E_2 s kópiami rezov l_0, l_1, l_2 . Množiny E_0, E_1, E_2 zodpovedajú jednotlivým vetvám funkcie $\sqrt[3]{z}$ a sú to jednoducho súvislé oblasti. V poslednom kroku tieto oblasti pospájame. Keď prechádzame spojito transversálne cez polpriamku l_0 , dostaneme sa na oblasť E_1 . Preto spojíme hranu l_0^+ z E_0 s hranou l_1^- z E_1 . Takto spojíme aj oblasti E_1 a E_2 . Nakoniec spojíme E_2 s E_0 a máme hotovú Riemannovu plochu funkcie $f(z) = \sqrt[3]{z}$ (poz. obr. 2 vľavo), poz. aj [4]. Na obrázku vpravo vidíme vizualizáciu funkcie $f(z) = \sqrt[3]{z}$ pomocou našej metódy. Vidíme, že má tiež tri vetvy. Pre podrobnejší popis funkcie rovnakého typu poz. podkapitolu 4.2

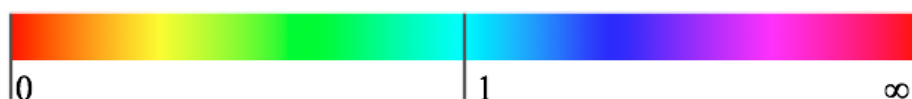
4. Prezentácia výsledkov a techník

4.1. Použité technológie

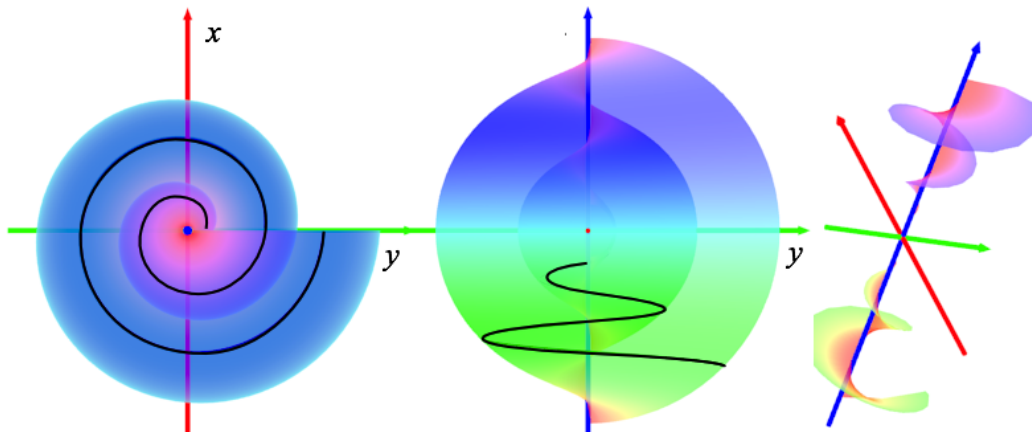
Nasledujúce vizualizácie sme vytvorili v programe Blender [1] pomocou skriptovacieho jazyku Python [2].

Veľkosť modulu znázorňuje farebný prechod (poz. obr. 3). Podľa farby vieme určiť približnú hodnotu modulu v danom bode. Pre lepšiu prehľadnosť sme zvýraznili vhodnú hodnotu modulu.

Na zobrazenie hodnoty argumentu komplexného čísla sme zvolili vzdialenosť daného bodu od guľovej plochy s polomerom 1, ktorá reprezentuje Riemannovu sféru pre $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, poz. [7]. To znamená, že pre hodnotu argumentu 0 leží bod na povrchu jednotkovej gule. Ak je hodnota argumentu π , tak je vzdialenosť bodu od jednotkovej gule π . V prípade viaclistej funkcie sa táto vzdialenosť vhodne lineárne škáluje. Argument komplexného čísla $z = 0$ a $z = \infty$ nie je definovaný. Preto jeho hodnotu v našich vizualizáciách určujeme pomocou limity, ak existuje.



Obr. 3. Na obrázku je zobrazený prechod, ktorý sme použili pri vizualizácii modulu komplexného čísla.



Obr. 4. Na obrázku je zobrazená vizualizácia zobrazenia $f(z) = \sqrt{z}$. Vľavo vidíme pohľad v smere osi z , v strede pohľad v smere osi x . Na obrázkoch je zvýraznená konštantná hodnota modulu $r \doteq 0, 4$.

4.2. Vizualizácia zobrazenia $f(z) = \sqrt[m]{z+a}$

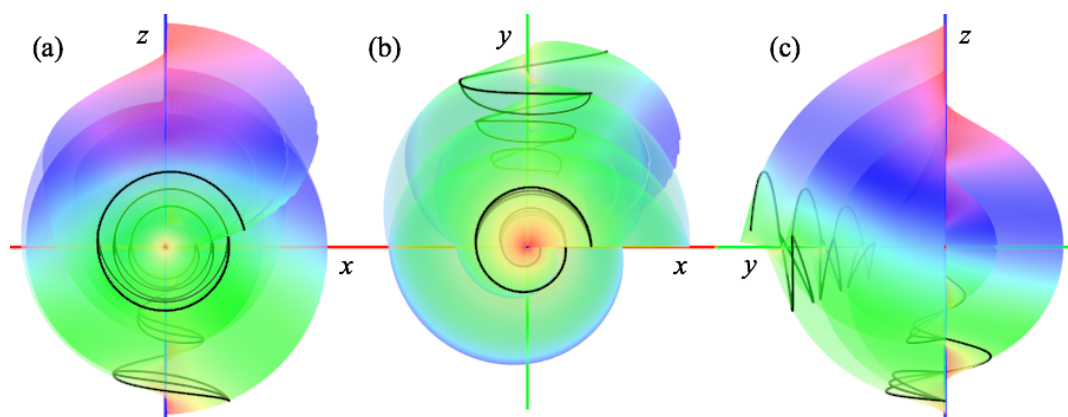
Na obrázku 4 môžeme vidieť Riemannovu plochu zobrazenia $f(z) = \sqrt{z}$ z rôznych pohľadov. Pri pohľade v smere osi z tvorí graf špirálu. Z toho vyplýva, že pri prechode po kružnici proti smeru chodu hodinových ručičiek funkčná hodnota argumentu komplexného čísla bude rásť.

Na obrázku v strede vidíme, že oranžová farba sa nachádzajú v okolí plochy, ktorá zodpovedá bodu 0. To znamená, že v tejto časti plochy sú hodnoty modulu blízke k nule. Tiež vidíme, že fialová farba sa nachádzajú vo vrchnej časti grafu, ktorá zodpovedá bodu nekonečno. V bode nekonečno sa nachádza pól funkcie. Pri pohľade v smere osi x vidíme, že modul funkčnej hodnoty rastie zospodu nahor. V grafe sa nenachádzajú žiadne skoky vo farebnom prechode, čo znamená, že sa modul funkčnej hodnoty mení spojitou.

Na obrázku vpravo vidíme výrezy grafu v okolí bodov 0 a ∞ . Riemannova plocha má tvar skrutkovej plochy, čo znamená, že tieto dva body sú vetviacimi bodmi zobrazenia $f(z) = \sqrt{z}$. Aby sme sa dostali od začiatku Riemannovej plochy po koniec, musíme spraviť dve otáčky okolo vetviacich bodov, čo znamená, že funkcia má dva listy. Na obrázkoch je zvýraznený obraz kružnice s polomerom $r \doteq 0, 4$.

4.3. Vizualizácia zobrazenia typu $f(z) = \sqrt[m]{(z+a)} \sqrt[n]{(z+b)}$

Na obrázku 5 vidíme Riemannovu plochu funkcie $f(z) = \sqrt{z} \sqrt[3]{(z+i)}$. Funkcia sa skladá z odmocnín rôzneho stupňa. Preto sme ju pred samotným zostrojením grafu upravili na spoločnú odmocninu so základom určeným ako najmenší spoločný násobok pôvodných odmocnín. Dostali sme funkciu $f(z) = \sqrt[6]{z^3(z+i)^2}$. Zobrazujeme šiestu odmocninu, preto bude mať Riemannova plocha šesť vrstiev. Na obrázku vidíme, že okolo koreňa 0 sa trikrát nachádza dvojité špirála a okolo koreňa $-i$ sa dvakrát nachádza trojitá špirála. Ukážeme si, prečo vznikajú v okolí vetviacich bodov viacnásobné špirály. Vezmime si kružnicu $z = re^{i\theta}$ s $r < 1, \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle$ so stredom v singulárnom bode 0. Po dosadení do funkcie $\sqrt[6]{z^3(z+i)^2}$ získame $\sqrt[6]{(re^{i\theta})^3(re^{i\theta} + 1e^{i\pi/2})^2} = \sqrt{r}e^{i(\theta/2)} \sqrt[3]{re^{i\theta} + 1e^{i\pi/2}}$. Kružnica obsahuje iba singulárny bod 0, preto na zmenu vrstiev bude vplývať iba druhá odmocnina. Tretia odmocnina spôsobí deformáciu zobrazenej kružnice. Po prejdení od 0 po 2π sa dostaneme z prvej na druhú vrstvu.



Obr. 5. Na obrázku vidíme Riemannovu plochu komplexnej odmocniny $f(z) = \sqrt[3]{z^3(z+i)}$ z pohľadu zo smeru osi y , zo smeru osi z a zo smeru osi x . Čiernymi špirálami sú zvýraznené obrazy kružníc so stredom vo vetviacich bodoch $0, -i$ a polomerom $r \doteq 0, 2$. Na obrázku vpravo môžeme vidieť pretínanie sa vrstiev, ktoré je spôsobené rôznymi stupňami odmocnín.

Po ďalšej otočke od 2π po 4π sa dostaneme z druhej vrstvy na prvú. Výsledná plocha bude mať šesť vrstiev, preto opísaný postup opakujeme až kým nedosiahneme 12π , čo predstavuje šesť otočiek okolo singulárneho bodu. Takto získame trikrát špirálu s dvoma otočkami. Tieto špirály vždy začínajú v bode $r^{1/2}(r + e^{i\pi/2})^{1/3}$. Analogicky postupujeme pri druhom singulárnom bode $-i$. Všimnime si tiež, že body na špirále, ktorých argument sa líši iba o násobok 2π , ležia na rozdielnych vrstvách a súčasne na jednej radiáne polpriamke so stredom v strede Riemannovej sféry. Toto je spôsobené tým, že argument určuje veľkosť posunu, nie smer.

Na obrázku 5 tiež vidíme, že sa vrstvy medzi koreňmi pretínajú. Tieto samoprieseky sú spôsobené použitou projekciou Riemannovej plochy do trojrozmerného priestoru. Z grafu tiež vidíme, že funkcia má dva rezy vetiev. Z vetviaceho bodu 0 vedie rez pozdĺž polpriamky $l_0 = \{z \in \mathbb{R}; z \geq 0\}$ a z vetviaceho bodu $-i$ vedie rez pozdĺž polpriamky $l_{-i} = \{z \in \mathbb{C}; \Re(z) \geq 0, \Im(z) = -i\}$.

4.4. Vizualizácia súčinu racionálnych mocnín

Uvažujme o zobrazení $f(z) = (z+a_1)^{m_1/n_1}(z+a_2)^{m_2/n_2} \dots (z+a_k)^{m_k/n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, kde $a_i \neq a_j$ pre $i, j \in \{1, \dots, k\}$ a $i \neq j$ a $NSD(m_i, n_i) = 1$, $i = 1, \dots, k$. Funkcie tohto typu majú vždy párny počet vetviacich bodov, [4]. V prípade nepárneho počtu koreňov $-a_1, \dots, -a_k$, berieme ako vetviaci bod aj bod nekonečno. Riemannova plocha takejto funkcie $f(z)$ bude mať počet vrstiev určený najmenším spoločným násobkom odmocnín $n = NSN(n_1, \dots, n_k)$. Teda zobrazujeme funkciu $f(z) = \sqrt[n]{(z+a_1)^{m_1^*} \dots (z+a_k)^{m_k^*}}$. Koeficient n_i určuje, koľko otočiek bude mať špirála okolo koreňa $-a_i$ a koeficient $m_i^* = \frac{nm_i}{n_i}$ určuje, počet týchto špirál.

5. Záver

V našej práci sme opísali tvorbu grafov odmocnín polynómov komplexnej premennej a ich súčinov. Vieme zobrazit' všetky listy funkcie na celom jej definičnom obore.

Používateľ má možnosť vytvorený 3D model ľubovoľne otáčať, upravovať a animovať. Táto možnosť interaktivity napomáha k lepšiemu pochopeniu priebehu funkcie.

V ďalšej práci sa zameriame na zložitejšie typy singularít niektorých mnoholistých funkcií, ako sú logaritmus, inverzné goniometrické funkcie a iné. Vyskúšame ďalšie typy projekcií Riemannovských plôch. Plánujeme preskúmať pojem uzla v okolí singularného bodu a identifikovať ho vo vizualizáciach.

6. Pod'akovanie

Tento výskum spadá do riešenia projektu ASFEU Comeniana – metódy a prostriedky digitalizácie a prezentácie 3D objektov kultúrneho dedičstva, OPVaV-2011/4.2/07-SORO, ITMS: 26240220077

Literatúra

- [1] Blender. <http://www.blender.org/>, 2012.
- [2] Python. <http://www.python.org/>, 2012.
- [3] FORSTER, O. *Lectures on Riemann Surfaces (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1981, ISBN 0387906177.
- [4] JONES, G. A., SINGERMAN, D. *Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint*. Great Britain: Press Syndicate of the University of Cambridge, 1987, ISBN 052131366.
- [5] LUNDMARK, H. Visualizing complex analytic functions using domain coloring. http://www.mai.liu.se/~halun/complex/domain_coloring-unicode.html, 2004.
- [6] NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis*. New York, USA: Oxford University Press Inc., 2000, ISBN 0198534469.
- [7] VALÍKOVÁ, M., CHALMOVIANSKÝ, P. Vizualizácia funkcií komplexnej premennej na Riemannovej sfére. *In Proceedings of symposium on computer geometry SCG 2010*, ročník 19, 2010: s. 87–92.

Summary

We often use the domain coloring method for the visualization of complex functions. This method does not give a correct image, when a multi-valued function is visualized. Using Riemann surface associated with the function leads to an improvement. On such a surface the multi-valued function behaves like a single-valued.

The aim of this work is to describe a technique for visualizations of the multi-valued complex functions on the Riemann surfaces. We create the Riemann surface over the Riemann sphere of the product of rational power. Each branch point is highlighted by a spiral image of a small enclosing circle.